ENHANCED BINDING FOR N-PARTICLE SCALAR QUANTUM FIELD MODELS (Non-Commutative Analysis and Micro-Macro Duality)

廣島, 文生; 佐々木, 格

数理解析研究所講究録
第 1609 巻 2008 年 120-131

Enhanced Binding for N-particle Scalar Quantum Field Models

廣島 文生 (九大・数理)* 佐々木 格 (プリンストン大学)

1 はじめに

有限自由度系のシュレディンガー作用素に摂動を加えたとき, そのスペクトルが劇的に変化することは稀ではない. 例えば3次元ラプラス作用素 $-(1/2)\Delta$ に摂動を加えることを考えてみる. もちろん $-(1/2)\Delta$ は固有値を持たずそのスペクトルは $\sigma(-(1/2)\Delta)=[0,\infty)$ である. これにクーロンポテンシャル $-1/|x|$ を加えれば $-(1/2)\Delta-1/|x|$ のスペクトルは $\sigma(-(1/2)\Delta-1/|x|)=\{-1/2n^2\}_{n=1}^{\infty}\cup[0,\infty)$ のようになり, ゼロに集積する固有値 $\{-1/2n^2\}_{n=1}^{\infty}$ が無限個現れる (図 1).

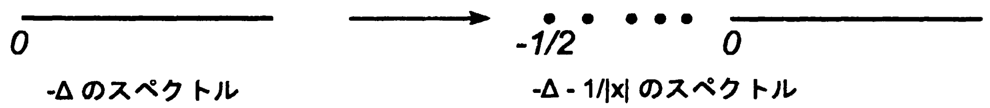

図 1: スペクトルの変化 1

これはクーロンポテンシャルに任意の正の系数 ϵ をつけて $-\epsilon/|x|$ という摂動を加えても, 同様に無限個の離散固有値が現れる. また $(1/2)|x|^2$ の摂動を加えればスペクトルは劇的に変化して $\sigma(-(1/2)\Delta+(1/2)|x|^2)=\{n+1/2\}_{n=1}^{\infty}$ となり, もはや連続スペクトルは消えてしまい純粋離散スペクトルになってしまう (図 2).

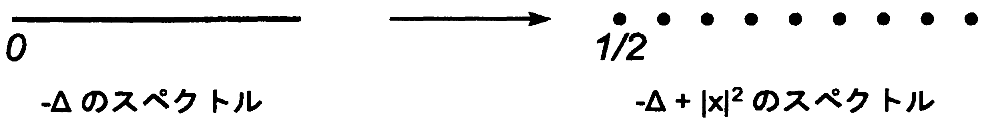

図 2: スペクトルの変化 2

つまり純粋連続スペクトルが摂動により離散スペクトルを含む形になることはよく起こることである.

*e-mail address: hiroshima@math.kyushu-u.ac.jp

ここで話を場の量子論にうつそう．場の量子論の模型では，上述のシュレディンガー作用素のように摂動を加えて離散スペクトルがポツポツと現れる現象を見つけることは容易ではない．我々が考察する質量ゼロのスカラー場の模型では多くの場合ハミルトニアン H のスペクトルは $\sigma(H)=[E,\infty)$ となり E は離散スペクトルに属さない．さらに E が固

図 3: 質量ゼロの場の量子論の模型のスペクトル

有値になることも自明ではない (図 3).

Enhnaced binding とは粒子系が量子場と結合することにより相互作用系に基底状態が現れることをいう．スペクトルでいえば結合定数が大きくなれば $\inf\sigma(H)$ が固有値になることをいう．現在までに様々な重要な模型で enhanced binding の存在が示されている．例えば，ミニマル結合した模型では微分結合から有効質量が現れ，粒子の裸の質量を重くして相互作用系に基底状態が現れることが示されている [Hir01, Hir04, HS01]．特にミニマル結合の場合粒子の個数は 1 つでも enhanced binding が起きる (図 4).

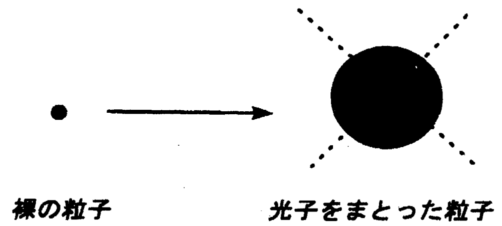

図 4: ミニマル結合の模型

一方，今回我々が考察したスカラー場の模型の相互作用は線形なものであるから，あからさまに有効質量は現れない．しかし結合定数が十分大きくなれば有効ポテンシャル (引力) を仲立ちにして N 個の粒子が集まり巨大な質量をもった 1 粒子に見える (図 5)．そしてこの相互作用系は基底状態をもつことになる．ミニマル結合と異なり，この場合原理的には 2 粒子以上でなければ enhanced binding を示すことが出来ない．

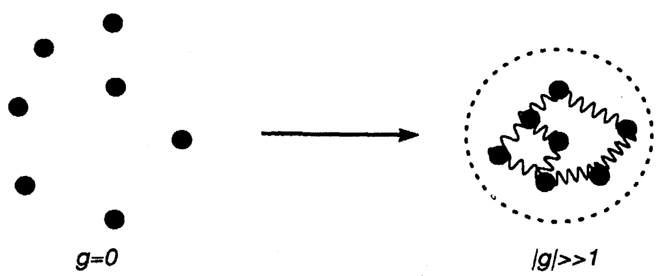

図 5: 相互作用により巨大な 1 粒子が出来る

ここから数学的な設定にうつる．K_0 を適当なヒルベルト空間上の自己共役作用素とし，K_{I} は K_0 に相対有界な対称作用素とする．$|\alpha|$ が十分に小さいとき $K(\alpha)=K_0+\alpha K_{\mathrm{I}}$ は下から有界な自己共役作用素になる．場の量子論の模型では $K(\alpha=0)=K_0$ の固有値は埋蔵固有値になっている．特に $\inf\sigma(K_0)$ が固有値になっている場合に摂動 αK_{I} を加えてもそれが固有値として残るかどうかは自明ではない．しかし現在までのところかなり一般的な模型でそれが固有値として残ることが示されてきた．

今回は $\inf\sigma(K_0)$ が固有値であることを仮定せずに，十分大きな $|\alpha|$ に対して $K(\alpha)$ が基底状態を持つことを N 体ネルソン模型で示す．つまり十分大きな $|\alpha|$ に対して $\inf\sigma(K(\alpha))$ は固有値になることを示す．

2 模型の定義

N 体ネルソン模型は N 個の荷電粒子がスカラー場を介在して線形に相互作用する模型である．物理的には中間子（ボゾン）と核子 (フェルミオン) の相互作用模型であるがあまり物理的なことには深入りせずに純粋に数学的な問題として考えることにする．まずはじめに粒子系と量子場系を定義し，その後で相互作用ハミルトニアンを与える．

(粒子系) $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ 上にシュレディンガー作用素

$$H_{\mathrm{p}}=\sum_{j=1}^{N}\left(-\frac{1}{2m}\Delta_j+V(x_j)\right)$$

を定義する．ここで $\Delta_j=-\sum_{k=1}^{3}\partial^2/\partial x_{jk}^2$. 簡単のために N 個の粒子の質量は全て m とし，j 番目の粒子の外場ポテンシャルは j に依らず全て V で与えられるとする．さらに 2 粒子間に働くポテンシャルはないと仮定する．つまり独立な N 個の粒子が外場ポテンシャル V でそれぞれ束縛されているわけである．V の仮定を導入する．

仮定 2.1 (1) V は有界. (2) $\exists N_c>0$ st $\forall N>N_c$ に対して $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上のシュレディンガー作用素 $-(1/2m)\Delta+N^2V$ のスペクトルの下限は離散スペクトルに含まれる．

例えば 3 次元の Lieb-Thirring 不等式

$$\#\{-(1/2m)\Delta+V \text{ の } 0 \text{ 以下の固有値の個数}\}\leq a\int_{\mathbb{R}^3}|mV_-(x)|^{3/2}dx$$

から V が負で十分に薄ければ $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上のシュレディンガー作用素 $-(1/2m)\Delta+V$ の基底状態は存在しない．しかし，さらに V が連続で $\lim_{|x|\to\infty}V(x)=0$ であれば，V はラプラス作用素に相対コンパクトになるから，摂動 N^2V は $-(1/2m)\Delta$ の本質的スペクトルを不変にし $-(1/2m)\Delta+N^2V$ の本質的スペクトルの下限はゼロのままである．ゆえに N を十分に大きくとれば $-(1/2m)\Delta+N^2V$ は基底状態を持つことになる. 仮定 2.1(2) はこのような状況を心の中で描いている．

(量子場系) 対称テンソル積 $\otimes^n L^2(\mathbb{R}^3)$ の無限直和

$$\mathscr{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\otimes_s^n L^2(\mathbb{R}^3)\right]$$

をフォック空間という. $\Phi = \{\Phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F}$ に対して $(\Phi, \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty}(\Phi^{(n)}, \Psi^{(n)})$ で内積を定めると, この位相で $\mathscr{F}$ はヒルベルト空間になる. フォック真空を $\Omega \in \mathscr{F}$ とおく. $a(f)$, $a^*(g)$, $f, g \in L^2(\mathbb{R}^3)$, をそれぞれ $\mathscr{F}$ 上の生成作用素, 消滅作用素とする. これは $\left(a(\bar{f})\right)^* = a^*(f)$ 及び正準交換関係

$$[a(f), a^*(g)] = (\bar{f}, g), \quad [a(f), a(g)] = 0 = [a^*(f), a^*(g)]$$

を満たす. $a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)\Omega$ という形のベクトルで張られる線形空間は $\mathscr{F}$ で稠密である. 形式的に $a^\sharp(f) = \int a^\sharp(k) f(k) dk$ とかき表す.

考察するスカラー場は質量ゼロとし, 運動量 k のときエネルギーは

$$\omega(k) = |k| = \sqrt{|k|^2 + 0^2}, \quad k \in \mathbb{R}^3,$$

で与えられる. $\mathscr{F}$ 上の自由ハミルトニアン H_f は形式的に

$$H_\mathrm{f} = \int \omega(k) a^*(k) a(k) dk$$

で定義される. これは $H_\mathrm{f}\Omega = 0$,

$$H_\mathrm{f} a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)\Omega = \sum_{j=1}^{n} a^*(f_1)\cdots a^*(\omega f_j)\cdots a^*(f_n)\Omega$$

のように作用する. もちろん $f_j \in D(\omega)$ を仮定している. ちなみに $\sigma(H_\mathrm{f}) = [0, \infty)$ かつ $\sigma_\mathrm{p}(H_\mathrm{f}) = \{0\}$ である.

(相互作用系) 量子場と粒子が結合する相互作用系の状態空間は

$$\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathscr{F}$$

で与えられる. もちろん $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ は粒子の状態空間を表し, $\mathscr{F}$ はボゾンの状態空間を表している. 相互作用のない非結合ハミルトニアンは H_p と H_f の和として定義される:

$$H_0 = H_\mathrm{p} \otimes 1 + 1 \otimes H_\mathrm{f}. \tag{2.1}$$

H_0 のスペクトルは

$$\sigma(H_0) = \{\lambda + \mu | \lambda \in \sigma(H_\mathrm{p}), \mu \in \sigma(H_\mathrm{f})\}$$

となるから, もし $\sigma(H_\mathrm{p}) = [0, \infty)$ で H_p が固有値をもたなければ, H_0 も固有値を持たず, そのスペクトルは $\sigma(H_0) = [0, \infty)$ となる. ここに相互作用を導入する. スカラー場を

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^*(\hat{\varphi} e^{-ikx}/\sqrt{\omega}) + a(\hat{\varphi} e^{+ikx}/\sqrt{\omega})\right) \tag{2.2}$$

で定義する．ここでカットオフ関数は

$$\hat{\varphi}(k) = \begin{cases} 0, & |k| < \kappa, \\ 1/\sqrt{(2\pi)^3}, & \kappa \le |k| \le \Lambda, \\ 0, & |k| > \Lambda \end{cases}$$

である．$0 < \kappa < \Lambda$ はそれぞれ赤外カットオフ，紫外カットオフと呼ばれる．数学的にはもちろん $\hat{\varphi}$ を上述の形にこだわる必要はない．さて，我々の相互作用ハミルトニアンは次で与えられる．

定義 2.2 [Nelson 模型]

$$H = H_0 + g\sum_{j=1}^{N} \phi(x_j); \quad g \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Nelson 模型の定義で g は結合定数であり，以下の議論ではパラメターとみなす．

ここで数学的な注意を与える．相互作用項 $H_\mathrm{I} = \sum_{j=1}^{N} \phi(x_j)$ の正確な定義は以下である．$\mathscr{H}$ を $\mathbb{R}^{3N}$ 上の $\mathscr{F}$-値 L^2 関数の空間と同一視すれば，$F \in \mathscr{H}$ は $\mathbb{R}^{3N} \ni x \mapsto F(x) \in \mathscr{F}$ という関数と見なせる．この同一視の下で H_I は $(H_\mathrm{I}F)(x) = \sum_{j=1}^{N} \phi(x_j)F(x)$, $x = (x_1, ..., x_n)$, で定義される．定義域は $D(H_\mathrm{I}) = \{F \in \mathscr{H} | F(x) \in D(\sum_{j=1}^{N} \phi(x_j)), \forall x \in \mathbb{R}^{3N}\}$ である．

さて $\phi(x)$ は H_0 に対して無限小相対有界なので H は $D(\Delta \otimes 1) \cap D(1 \otimes H_\mathrm{f})$ 上自己共役である．また H_0 の任意の core 上で本質的自己共役になる．これらは自己共役性の判定を与える古典的な定理である Kato-Rellich の定理で示される．

今までに知られている結果を紹介する．粒子のハミルトニアン H_p のスペクトルの下限が離散スペクトルに属するとする．このときもちろん H_p の基底状態は存在する．

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk < \infty \tag{2.4}$$

であれば任意の $g \in \mathbb{R}$ に対して H の基底状態が存在することが知られている [Ger00, GLL01, Sas05, Spo98]. (2.4) は赤外正則条件といわれることがあり，基底状態の存在・非存在に重要な役目を果たす条件である．事実，(2.4) の左辺の積分が発散するときにネルソン模型の基底状態の非存在が示されている [Hir06]. 話を元に戻そう．歴史的には十分小さな $|g|$ に対して基底状態の存在が示され [BFS97], その後，任意結合定数へ拡張された．もちろん $|g|$ が小さければ基底状態の存在証明は技術的には容易である．これらの結果は H_p の基底状態の存在を仮定しているのだから，結果的に「基底状態は消えない！」ということを示したともいえる．

さて我々の enhnaced binding であるが H_p の基底状態の存在を仮定していないのであるから，標語的には「基底状態が現れる!」という現象を示していることになる．

3 結果

結果を述べる前に H の weak coupling limit (弱結合極限) について述べる．$\kappa > 0$ をスケーリングパラメターとして

$$H(\kappa) = H_{\mathrm{p}} + \kappa H_{\mathrm{I}} + \kappa^2 H_{\mathrm{f}}$$

とおこう．このとき強レゾルベントの意味で

$$\lim_{\kappa\to\infty}(H(\kappa)+z)^{-1} = (H_{\mathrm{eff}}+z)^{-1}\otimes P_\Omega \tag{3.1}$$

となることが示せる [Hir98, Hir99]．ここで P_Ω はフォック真空の張る 1 次元部分空間への射影作用素である．さらに

$$H_{\mathrm{eff}} = \sum_{j=1}^{M} -\frac{1}{2m}\Delta_j + g^2\sum_{i\neq j} W_{ij} + \sum_{j=1}^{N} V(x_j) - \frac{g^2}{4}N\|\hat{\varphi}/\omega\|^2$$

であり，

$$W_{ij} = W(x_i - x_j) = -\frac{1}{4}\int \frac{e^{-ik(x_i-x_j)}|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^2}dk \tag{3.2}$$

は smeared クーロンポテンシャルであり $|x_i - x_j|$ が十分小さいとき負となるから引力として働く．つまり $|g|$ が十分大きければ H_{eff} は基底状態を持つことになる．我々の目標は「十分 κ が大きいときに $|g|$ を大きくとれば $H(\kappa)$ に基底状態が現れる」という主張を示すことにある．次が主結果である．

定理 3.1 [HS07] 十分大きい $\kappa > 0$ と，$N > N_c$ に対して $\exists\alpha_c$, $\exists\alpha_c(\kappa) > 0$ で次を満たすものが存在する．$\alpha_c < |g| < \alpha_c(\kappa)$ ならば $H(\kappa)$ の基底状態が一意的に存在する．

κ に関してひとつ注意を与える．

$$H(\kappa) = \kappa^2\left\{\frac{1}{\kappa^2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2m}\Delta_j + V(x_j)\right)\otimes 1 + \frac{1}{\kappa}g\sum_{j=1}^{N}\phi(x_j) + 1\otimes H_{\mathrm{f}}\right\}$$

であるから $\bar{m} = m\kappa^2$, $\bar{V} = V/\kappa^2$, $\bar{\phi}(x) = \phi(x)/\kappa$ と其々定義すれば

$$\bar{H} = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2\bar{m}}\Delta_j + \bar{V}(x_j)\right)\otimes 1 + g\sum_{j=1}^{N}\bar{\phi}(x_j) + 1\otimes H_{\mathrm{f}}$$

は $\alpha_c < |g| < \alpha_c(\kappa)$ で基底状態を持つことになる．よって κ はダミーであり本質的なものではない．

4 定理3.1の証明

一意性は[BFS97]によって既に証明されているので，存在についてその証明の概略を述べる．方針はκを十分大きくとり，diamagnetic 不等式，変分原理，[GLL01]のcriteriaを用いることにより場の量子論の問題をシュレディンガー作用素の問題へ還元することにある．

はじめにBogoliubov変換

$$T = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{g}{\sqrt{2}\kappa}\left(a^*(e^{-ikx_j}\hat{\varphi}/\omega^{3/2}) - a(e^{ikx_j}\hat{\varphi}/\omega^{3/2})\right)\right),$$

で$H(\kappa)$を

$$T^{-1}H(\kappa)T = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\frac{1}{2m}\left(-i\vec{\nabla}_j \otimes 1 - \frac{g}{\kappa^2}\vec{\phi}(x_j)\right)^2}_{:=T_j} + \kappa^2 1 \otimes H_{\mathrm{f}}$$
$$+\left(\sum_{j=1}^{N} V(x_j) + g^2\sum_{i\neq j} W_{ij} - \frac{g^2}{4}N\|\hat{\varphi}/\omega\|^2\right)\otimes 1 \qquad (4.1)$$

のようにユニタリー変換する．ここで

$$\vec{\phi}(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^*(k\hat{\varphi}e^{-ikx}/\omega^{3/2}) + a(k\hat{\varphi}e^{+ikx}/\omega^{3/2})\right) \qquad (4.2)$$

である．(4.1)の右辺から分かるように，$\kappa \to \infty$のとき$g/\kappa^2 \to 0$なのでミニマル結合の部分が消滅し形式的に(3.1)となることが分かるだろう．また結合定数g^2をもった粒子間ポテンシャル$g^2\sum_{i\neq j} W_{ij}$が現れているので直感的に$|g| \gg 1$であれば粒子が強く引かれ合うことも理解できよう．さらにBogoliubov変換すればHはミニマル結合した形になるのでdiamagnetic 不等式が応用できる利点もある．

定数$(g^2/4)N\|\hat{\varphi}/\omega\|^2$は以下の議論に無関係なのでそれを除き，テンソル積$\otimes$の記号も省略することにし，そのハミルトニアンを改めて$H = H(\kappa)$と書くことにする:

$$H = \sum_{j=1}^{N} T_j + \kappa^2 H_{\mathrm{f}} + g^2 \sum_{i\neq j} W_{ij} + \sum_{j=1}^{N} V(x_j). \qquad (4.3)$$

(3.2)のWの性質を述べる．(1) Wは連続，(2) $\lim_{|x|\to\infty} W(|x|) = 0$, (3) Wは3次元ラプラス作用素に対して相対コンパクト，(4) Wは実数値で$W(0) \leq W(x)$が成り立つ．

いま$C = \{1, 2, ..., N\}$とし$\beta \subset C$, $\beta \neq C$, $\beta^c = C \setminus \beta$とおく．ここで$\beta$に対して$H$のクラスターを次のように定義する．

$$H^0(\beta) = \sum_{j\in\beta} T_j + \kappa^2 H_{\mathrm{f}} + g^2 \sum_{i,j\in\beta} W_{ij},$$
$$H^V(\beta) = H^0(\beta) + \sum_{j\in\beta} V(x_j).$$

そして $E^V(\beta) = \inf \sigma(H^V(\beta))$ とおこう．また特に

$$\inf \sigma(H) = E^V(C) := E$$

とおく．最小 2 重クラスターエネルギー Σ を次で定義する．

定義 4.1 $\Sigma := \inf_{\beta \subset C, \beta \neq C} \left(E^V(\beta) + E^0(\beta^c) \right).$

Σ は定義のごとく β に含まれる粒子が V で束縛され，残りの β^c の粒子が束縛から離れている系の全エネルギーを表している．粒子を電子と思い，ϕ を電磁場と思えば，陽イオン化した後の系のエネルギーを表しているといえる (図 6)．そのため物理的な直感を使えば，H の基底状態が存在するためにはイオン化せずに系が存在していればいい．つまり相互作用系のエネルギー E が Σ より小さければいいと予想される．

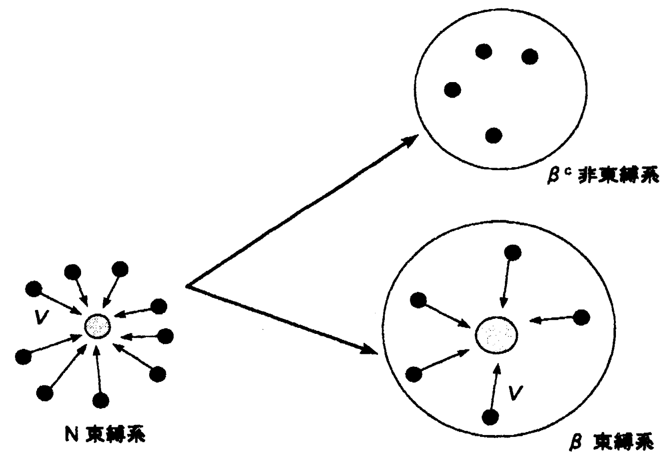

図 6: クラスター分解

実際これは厳密に証明されている．

命題 4.2 [GLL01] $\Sigma - E > 0$ ならば H の基底状態は存在する．

$\Sigma - E > 0$ は binding 条件とよばれている．以下でこの不等式が成立することを証明する．粒子の部分

$$h = \sum_{j=1}^{N} -\frac{1}{2m}\Delta_j + g^2 \sum_{i \neq j} W_{ij} + \sum_{j=1}^{N} V(x_j)$$

のクラスターを H と全く同様に定義する.

$$
\begin{aligned}
h^0(\beta) &= \sum_{j\in\beta} -\frac{1}{2m}\Delta_j + g^2 \sum_{i,j\in\beta} W_{ij},\\
h^V(\beta) &= H^0(\beta) + \sum_{j\in\beta} V(x_j),\\
\mathscr{E}^V(\beta) &= \inf \sigma(h^V(\beta)),\\
\Xi &= \inf_{\beta\subset C, \beta\neq C} \left(\mathscr{E}^V(\beta) + \mathscr{E}^0(\beta^c)\right).
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\inf \sigma(h) = \mathscr{E}^V(C) := \mathscr{E}
$$

とおく. 2つの最小2重クラスターエネルギー Σ と Ξ の大小関係は diamagnetic 不等式

$$
|(F, e^{-tH^V(\beta)}G)| \le (|F|, e^{-t(h^V(\beta)\otimes 1 + \kappa^2 1\otimes H_f)}|G|)
$$

から

$$
\Sigma \ge \Xi \tag{4.4}
$$

となることが即座に分かる. この不等式は場と結合した方がエネルギーが上がるといっている. また変分原理

$$
E \le (f\otimes\Omega, Hf\otimes\Omega)/\|f\otimes\Omega\|^2
$$

より

$$
E \le \mathscr{E} + \frac{g^2}{\kappa^2}\frac{N}{4m}\|\hat\varphi/\sqrt{\omega}\|^2 \tag{4.5}
$$

もわかる. (4.4),(4.5) から

$$
\Sigma - E \ge \Xi - \mathscr{E} - \frac{g^2}{\kappa^2}\left(\frac{N}{4m}\|\hat\varphi/\sqrt{\omega}\|^2\right) \tag{4.6}
$$

となり, 十分大きな $\kappa > 0$ に対して (4.6) の右辺が正になること, つまり

$$
\Xi - \mathscr{E} > 0 \tag{4.7}
$$

を示せば十分である. スケーリングパラメター κ を導入することにより, diamagnetic 不等式と簡単な変分原理から場の量子論の問題がシュレディンガー作用素の問題へ還元されたことになる.

注意 4.3 (4.6) について少し注意をしておく. $\Xi - \mathscr{E}$ は g にのみ依存し κ には依存しない量である. 以下で $|g| > \exists\alpha_c > 0$ のとき (4.7) が成立することを示す. そこでこの α_c に対して (4.6) の右辺が正になるように十分大きな κ をとる. その κ に対してさらに (4.6) の右辺が正になるような $|g|$ の上限 $\alpha_c(\kappa) > \alpha_c$ が決められる. つまり $\alpha_c < |g| < \alpha_c(\kappa)$ に対して H の基底状態が存在することが分かる.

さて, ここからはシュレディンガー作用素 h の解析になる. まずはじめに, 各クラスター $h^V(\beta) = \sum_{j\in\beta}(-(1/2m)\Delta_j + V(x_j)) + g^2\sum_{i,j\in\beta} W_{ij}$ は粒子間ポテンシャルの系数が g^2 であり, $W(0) < W(x)$, であるから

$$\lim_{g\to\infty}\frac{\mathscr{E}^0(C)}{g^2} = N(N-1)W(0),$$
$$\lim_{g\to\infty}\frac{\mathscr{E}^V(\beta)+\mathscr{E}^0(\beta^c)}{g^2} = (N(N-1)+2|\beta|(|\beta|-N))W(0)$$

がわかる. ここで $|\beta| = \#\beta$ である. さらに $W(0) < 0$ なのだから

$$\mathscr{E}^V(\beta) + \mathscr{E}^0(\beta^c) > \mathscr{E}^0(C) \tag{4.8}$$

が $|g| > \exists g'$ で成立する. 故に

$$\Xi > \mathscr{E}^0(C), \quad |g| > g'. \tag{4.9}$$

これより, (4.7) を示すには

$$\mathscr{E}^0(C) - \mathscr{E} > 0 \tag{4.10}$$

を示せばいいことがわかる. h を重心系に移して

$$UhU^{-1} = -\frac{1}{2Nm}\Delta_{x_c}\otimes 1 + 1\otimes\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N-1}-\frac{1}{2\mu_j}\Delta_{y_j} + g^2\sum_{i\neq j}W_{ij}\right)}_{=K} + \sum_{j=1}^{N}V(x_j).$$

ここで μ_j は reduced mass, $(x_1, ..., x_N) \to (x_c, y_1, ..., y_{N-1})$ で

$$x_c = \sum_{j=1}^{N} x_j/N, \quad y_j = x_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} x_i/j$$

であり,

$$L^2(\mathbb{R}^{3N}) \cong L^2(\mathbb{R}^3{}_{x_c}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)}_{y_1,\dots,y_{N-1}}) \tag{4.11}$$

と同一視した. IMS 局所化の議論からすぐに次の補題が示せる.

補題 4.4 $L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)}_{y_1,\dots,y_{N-1}})$ 上の作用素 K は $|g| > g''$ のとき基底状態 $u_g \in L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)}_{y_1,\dots,y_{N-1}})$ をもつ.

さらに $g^2 \to \infty$ のとき K の形から $|u_g(y_1, ..., y_{N-1})|^2$ は原点近傍に集中してくることが分かるだろう. 実際に

$$\lim_{g^2\to\infty}|u_g(y_1, ..., y_{N-1})|^2 \to \delta(y_1)\cdots\delta(y_{N-1}) \tag{4.12}$$

が超関数の意味で成立することが分かる.

次に重心の方をみてみよう. 仮定より $L^2(\mathbb{R}^3{}_{x_c})$ 上の作用素 $-\dfrac{1}{2mN}\Delta_{x_c}+NV(x_c)$ は $N>N_c$ で基底状態をもった. それを $v\in L^2(\mathbb{R}^3{}_{x_c})$ とおこう. さらに

$$\Phi_g := v\otimes u_g$$

とおく. この $\otimes$ は (4.11) の $\otimes$ である. 変分原理, (4.12) そして極限操作より次が示せる

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\leq \lim_{g\to\infty}(\Phi_g, UhU^{-1}\Phi_g) &= \mathscr{E}^0(C)+\lim_{g\to\infty}(\Phi_g,(\frac{1}{2Nm}\Delta_{x_c}+\sum_{j=1}^N V(x_j))\Phi_g)\\ &= \mathscr{E}^0(C)+(v,(\frac{1}{2Nm}\Delta_{x_c}+NV(x_c))v)<\mathscr{E}^0(C).\end{aligned}$$

ここで $-\dfrac{1}{2mN}\Delta_{x_c}+NV$ の基底状態エネルギーが負であることを使った. よって $|g|>\exists g'''$ のとき $\mathscr{E}<\mathscr{E}^0(C)$ が示された. 以上まとめて $\alpha_c=\max\{g',g'',g'''\}$ とおけば (4.7) が示されたことになる. 注意 4.3 より定理 3.1 が示されたことになる.

注意 4.5 ここでの議論では V の regularity について何もいわなかったが, 厳密に上述の概略を正当化するためには与えられた V を C_0^∞ 関数で近似した面倒な極限操作が必要である. 詳しくは [HS07, Appendix] を参照せよ.

注意 4.6 今回は簡単のためにカットオフ $\hat{\varphi}$ を具体的に与えたが, 抽象的には $\hat{\varphi}(-k)=\overline{\hat{\varphi}(k)}=\hat{\varphi}(k)$, $\sqrt{\omega}\hat{\varphi},\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}\in L^2(\mathbb{R}^3)$ であれば相互作用ハミルトニアンは自己共役になり, さらに赤外正則条件 $\int|\hat{\varphi}(k)|^2/\omega(k)^3dk<\infty$ を仮定すればユニタリー作用素 T が定義できて, ここで紹介した enhanced binding が同様に起きることが示せる.

5 おわりに

以上のように H の enhanced binding が示された. 他にも様々な模型で enhanced binding が示されている [AK03, CH04, CVV03, HVV03, HHS05]. しかし

$$\begin{cases}|g|<g_c\to \text{基底状態が非存在}\\ |g|>g_c\to \text{基底状態が存在}\end{cases}$$

となるような $g_c>0$ をみつけた例はないようである. 非存在を示すのが非常に困難である. 赤外発散する場合の基底状態の非存在の議論は多く知られているが, enhanced binding のようなパラメターに依存した基底状態の存在・非存在の議論には何か新しいアイデアが必要であろうと強く感じている.

参考文献

[AK03] A. Arai and H. Kawano, Enhanced binding in a general class of quantum field models, *Rev. Math. Phys.*15 (2003), 387–423.

[BFS97] V. Bach, J. Fröhlich, I. M. Sigal, Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory, *Adv. Math.* **137** (1998), 205–298, Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles, *Adv. Math.* **137** (1998), 299–395.

[CH04] I. Catto and C. Hainzl, Self-energy of one electron in non-relativistic QED, *J. Funct. Anal.* **207** (2004), 68-110.

[CVV03] T. Chen, V. Vougalter and S. A. Vugalter, The increase of binding energy and enhanced binding in nonrelativistic QED, *J. Math. Phys.* **44** (2003), 1961–1970.

[Ger00] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, Ann. Henri Poincaré **1** (2000), 443–459.

[HVV03] C. Hainzl, V. Vougalter and S. A. Vugalter, Enhanced binding in non-relativistic QED, *Commun. Math. Phys.* **233** (2003), 13–26.

[Hir06] M. Hirokawa, Infrared Catastrophe for Nelson's Model. — Non-Existence of Ground State and Soft-Boson Divergence —, *Publ. RIMS* **42** (2006), 897–922.

[HHS05] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and H. Spohn, Ground state for point particles interacting through a massless scalar field, *Adv. Math.*, **191** (2005), 339–392.

[Hir98] F. Hiroshima, Weak coupling limit and a removal of an ultraviolet cut-off for a Hamiltonian of particles interacting with a massive scalar field, *Inf. Dim. Anal. and Quantum Prob. and Related Topics* **1** (1998), 407-423.

[Hir99] F. Hiroshima, Weak coupling limit removing an ultraviolet cut-off for a Hamiltonian of particles interacting with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **40** (1999), 1215-1236.

[Hir01] 廣島文生, Binding through coupling to a radiation field, 京都大学数理解析研究所講究録 1208, (2001),69–79.

[Hir04] 廣島文生, Enhanced binding and mnass renormalization of nonrelativistic QED, 京都大学数理解析研究所講究録 1364, (2004),162-181.

[HS07] F. Hirohsima and I. Sasaki, Enhanced binding for N-particle system interacting with a scalar vose field I, to be published in *Math. Z.*

[HS01] F. Hiroshima and H. Spohn, Enhanced binding through coupling to a quantum field, *Ann. Henri Poincaré* **2** (2001), 1159–1187.

[GLL01] M. Griesemer, E. Lieb and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. Math.* **145** (2001), 557–595.

[Sas05] I. Sasaki, Ground state of the massless Nelson model in a non-Fock representation,*J. Math. Phys.* **46**, (2005) 102107.

[Spo98] H. Spohn, Ground state of quantum particle coupled to a scalar boson field, Lett. Math. Phys. **44** (1998), 9–16.